5 Derivasjon

> restart:

5.1 Grenseverdier

- limit($f(x), x = a$) beregner grenseverdien for $f(x)$ når x går mot a

  Limit($f(x), x = a$) $= \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Eksempel 5.1.1

Undersøk om grenseverdien eksisterer, og regn i så fall ut verdien.

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 6\,x + 9}$, **b)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - 3\,x + 2}{x - 2}$

Løsning

a)

> $f := x \mapsto \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 6\cdot x + 9}$

$$f := x \mapsto \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6\cdot x + 9}$$

Faktorisering gir

> $f(x) = factor(f(x))$

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 6\,x + 9} = \frac{x + 3}{x - 3}$$

Så tar vi grenseverdien.

> $map(Limit, \%, x = 3)$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6\,x + 9} = \lim_{x\to 3} \frac{x + 3}{x - 3}$$

> $rhs(\%) = value(rhs(\%))$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x + 3}{x - 3} = undefined$$

Grenseverdien eksisterer ikke fordi nevneren går mot 0 og telleren går mot 6.

Direkte beregning

> $Limit(f(x), x = 3) = limit(f(x), x = 3)$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6\,x + 9} = undefined$$

b)

> $g := x \mapsto \dfrac{x^3 - x^2 - 3\cdot x + 2}{x - 2}$

$$g := x \mapsto \frac{x^3 - x^2 - 3\cdot x + 2}{x - 2}$$

Faktorisering gir

> $g(x) = factor(g(x))$

$$\frac{x^3 - x^2 - 3x + 2}{x - 2} = x^2 + x - 1$$

Her ser vi at $(x - 2)$ er forkortet bort.

```
> map(Limit, %, x = 2)
```

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x^2 + x - 1)$$

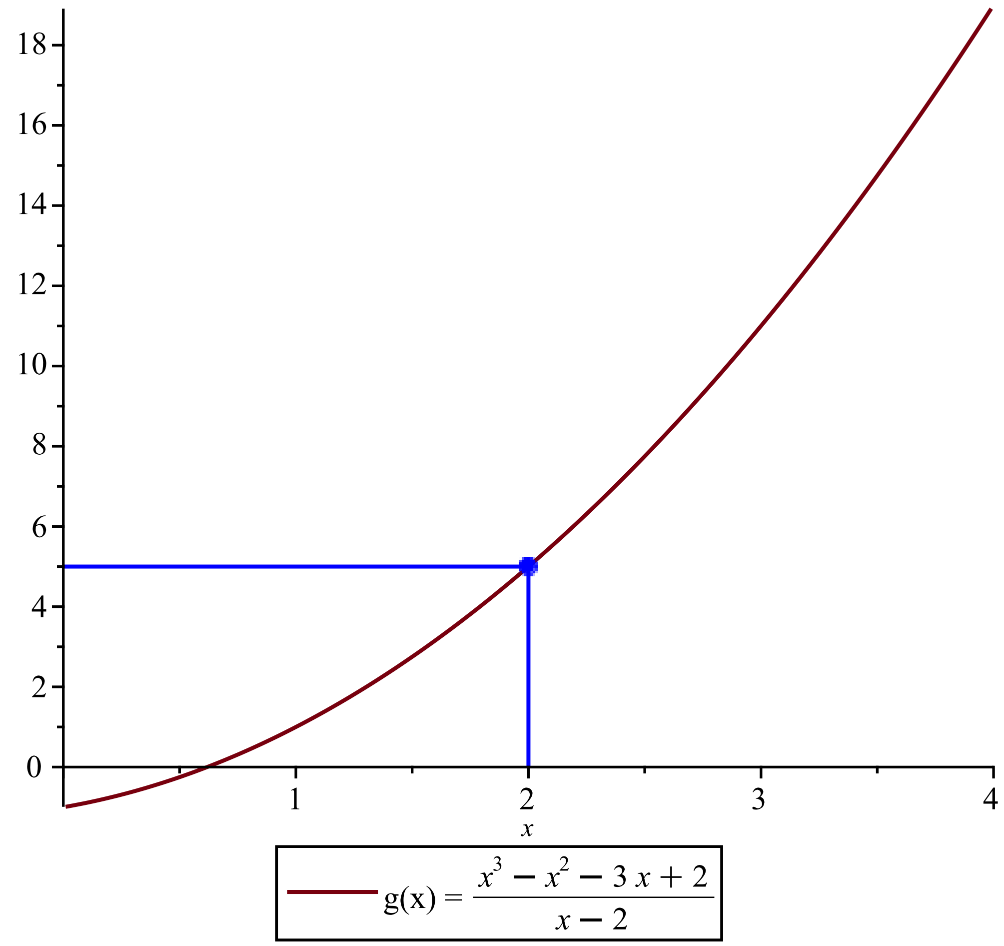
```
> value(%)
```

$$5 = 5$$

$g(x)$ er ikke definert for $x = 2$, men grenseverdien eksisterer. Fremstiller vi grafen, vil det se ut som om grafen er sammenhengende.

```
> p1 := plot(g(x), x = 0 ..4, title = "g(x) er ikke definert for x=2", legend = typeset("g(x) = ",
    g(x)), titlefont = [TIMES, BOLD, 14]) :
  p2 := pointplot([2, 5], symbol = solidcircle, symbolsize = 14, color = blue) :
  p3 := plot([[x, 5, x = 0 ..2], [2, y, y = 0 ..5]], color = blue) : display(p1, p2, p3)
```

g(x) er ikke definert for x=2



Vi kan beregne de ensidige grenseverdiene.

```
> Limit(g(x), x = 2, right) = limit(g(x), x = 2, right)
```

$> \lim_{x \to 2+} g(x) = \lim_{x \to 2+} g(x)$

$$\lim_{x \to 2+} \frac{x^3 - x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 5$$

$> \lim_{x \to 2-} g(x) = \lim_{x \to 2-} g(x)$

$$\lim_{x \to 2-} \frac{x^3 - x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 5$$

Eksempel 5.1.2

Finn grenseverdiene

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}, \quad \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^2 - 1}, \quad \lim_{x \to 1} \frac{2x - 4}{x^3 - x^2 - 2x}, \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

Løsning

Vi skriver opp funksjonene på listeform.

$$> L := \left[\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}, \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^2 - 1}, \frac{2x - 4}{x^3 - x^2 - 2x}, \frac{x^4 - 1}{x - 1} \right]$$

$$L := \left[\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}, \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^2 - 1}, \frac{2x - 4}{x^3 - x^2 - 2x}, \frac{x^4 - 1}{x - 1} \right]$$

Faktorisering gir

$$> L := map(factor, L)$$

$$L := \left[\frac{x - 2}{x}, \frac{x^2 + 2}{x + 1}, \frac{2}{(x + 1)\, x}, (x + 1)\,(x^2 + 1) \right]$$

Vi tar grenseverdiene

$$> map\left(Limit, L_{1..2}, x = 2\right)$$

$$\left[\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x}, \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2}{x + 1} \right]$$

$$> value(\%)$$

$$[0, 2]$$

$$> map\left(Limit, L_{3..4}, x = 1\right)$$

$$\left[\lim_{x \to 1} \frac{2}{(x + 1)\, x}, \lim_{x \to 1} (x + 1)\,(x^2 + 1) \right]$$

$$> value(\%)$$

$$[1, 4]$$

5.2 Grenseverdier når x går mot uendelig

Eksempel 5.2.1

Finn $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - 2x - 3x^2}$

Løsning

$$> f := x \mapsto \frac{2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1}{1 - 2 \cdot x - 3 \cdot x^2}$$

$$f := x \mapsto \frac{2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1}{1 - 2 \cdot x - 3 \cdot x^2}$$

Divisjon med x^2 i teller og nevner gir

$$> t := expand\left(\frac{numer(f(x))}{x^2} \right) :$$

$$> n := expand\left(\frac{denom(f(x))}{x^2} \right) :$$

> $f(x) = \frac{t}{n}$

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{-3x^2 - 2x + 1} = \frac{-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

> $map(Limit, \%, x = \infty)$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{-3x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

Av uttrykket på høyre side ser vi lett at at grenseverdien blir $-\frac{2}{3}$.

> $lhs(\%) = value(rhs(\%))$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{-3x^2 - 2x + 1} = -\frac{2}{3}$$

Direkte løsning gir

> $Limit(f(x), x = \infty) = limit(f(x), x = \infty)$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{-3x^2 - 2x + 1} = -\frac{2}{3}$$

Øvingsoppgave 5.2.5

Finn grenseverdiene

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 - 3x^2 + 2}{5x^4 - 2x^3 + 17}, \lim_{x \to \infty} \frac{3x - 4x^4}{2x^2 - x}, \lim_{x \to \infty} \frac{x(5 - 3x)}{(x + 1)^2}, \lim_{x \to \infty} \frac{(3x - 4)^3}{x^4}$$

Løsning

Vi skriver uttrykkene på listeform.

> $L := \left[\frac{3x^4 - 3x^2 + 2}{5x^4 - 2x^3 + 17}, \frac{3x - 4x^4}{2x^2 - x}, \frac{x(5 - 3x)}{(x + 1)^2}, \frac{(3x - 4)^3}{x^4} \right] : \%$

$$\left[\frac{3x^4 - 3x^2 + 2}{5x^4 - 2x^3 + 17}, \frac{-4x^4 + 3x}{2x^2 - x}, \frac{x(5 - 3x)}{(x + 1)^2}, \frac{(3x - 4)^3}{x^4} \right]$$

> $map(Limit, L, x = \infty)$

$$\left[\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 - 3x^2 + 2}{5x^4 - 2x^3 + 17}, \lim_{x \to \infty} \frac{-4x^4 + 3x}{2x^2 - x}, \lim_{x \to \infty} \frac{x(5 - 3x)}{(x + 1)^2}, \lim_{x \to \infty} \frac{(3x - 4)^3}{x^4} \right]$$

> $map(value, \%)$

$$\left[\frac{3}{5}, -\infty, -3, 0 \right]$$

5.3 Den deriverte

> **restart:**

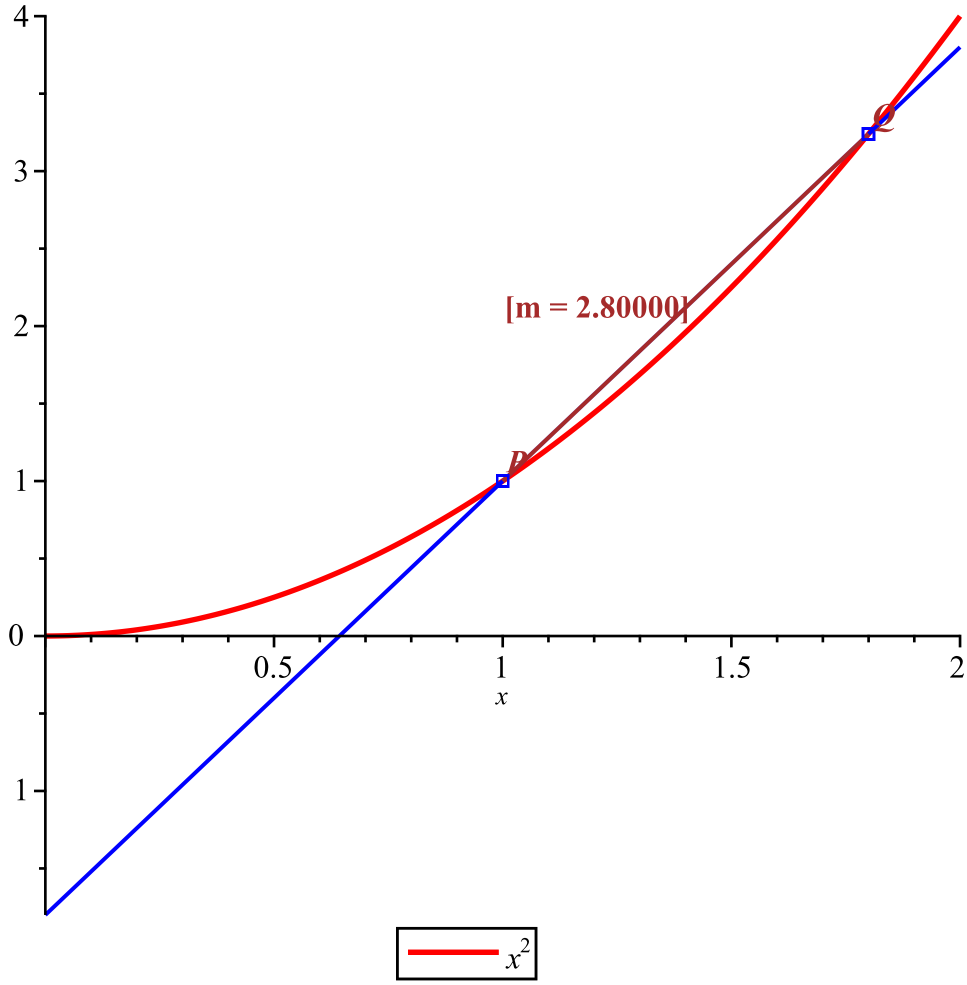
Den deriverte $f'(x)$ kan tolkes som stigningstallet for tangenten til grafen til f i punktet $(x, f(x))$.
Den matematiske definisjonen er

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Stigning $(f, x_0, x = \text{a..b})$ fremstiller grafen til den rette linjen gjennom punktene P og Q på grafen til f som en animasjon når punktet Q går mot P med x-koordinat x_0. Sekanten (den rette linjen) gjennom P og Q ender opp som tangenten til grafen til f i punktet P.

> $f := x \mapsto x^2$:

> $Stigning(f, 1, x = 0..2)$



Tallet m viser stigningstallet for linjen PQ

> $restart$:

Maple har en egen kommando for den deriverte.

- diff $(f(x), x)$ beregner den deriverte av $f(x)$ med hensyn på x

  Diff $(f(x), x)$ skriver kun derivasjonssymbolet $f'(x)$ som $\frac{df(x)}{dx}$

  value(Diff $(f(x), x)) =$ diff $(f(x), x)$, value tvinger Diff til å beregne verdien

  D$(f)(a)$ bestemmer verdien på den deriverte for $x = a$, $\mathrm{D} = \frac{d}{dx}$

Men vi kan også benytte oss av definisjonen for den deriverte og skrive denne som en funksjon av h.

> $fd := h \to Limit\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, h=0\right)$

$$fd := h \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

> $Diff(f(x), x) = fd(h)$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Eksempel 5.3.2

Finn $f'(x)$ og $f'(1)$ når $f(x) = x^3$

Løsning

Vi benytter først definisjonen over.

> $f := x \mapsto x^3 :$

> $Diff(f(x), x) = fd(h)$

$$\frac{d}{dx}(x^3) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

> $simplify(\%)$

$$\frac{d}{dx}(x^3) = \lim_{h \to 0} (h^2 + 3\,x\,h + 3\,x^2)$$

Med value får vi beregnet både venstre side (Maples Diff -kommando) og høyre side som er den grunnleggende definisjonen.

> $value(\%)$

$$3\,x^2 = 3\,x^2$$

Innsetting gir

> $eval(Diff(f(x), x), x=1) = eval(diff(f(x), x), x=1)$

$$\left(\frac{d}{dx}(x^3)\right)\Bigg|_{\{x=1\}} = 3$$

eval gjør at vi får evaluert (beregnet) den deriverte for $x = 1$.

eller

> $eval(Diff(f(x), x), x=1) = \mathrm{D}(f)(1)$

$$\left(\frac{d}{dx}(x^3)\right)\Bigg|_{\{x=1\}} = 3$$

>

Eksempel 5.3.3

a) Finn $f'(3)$ når $f(x) = 2\,x - x^2$.

b) Vis at punktet $(3, -3)$ ligger på grafen til f.

Hva er stigningstallet for tangenten til grafen i dette punktet?

Tegn grafen og tangenten i det gitte punktet i samme koordinatsystem.

c) Finn ligningen for tangenten.

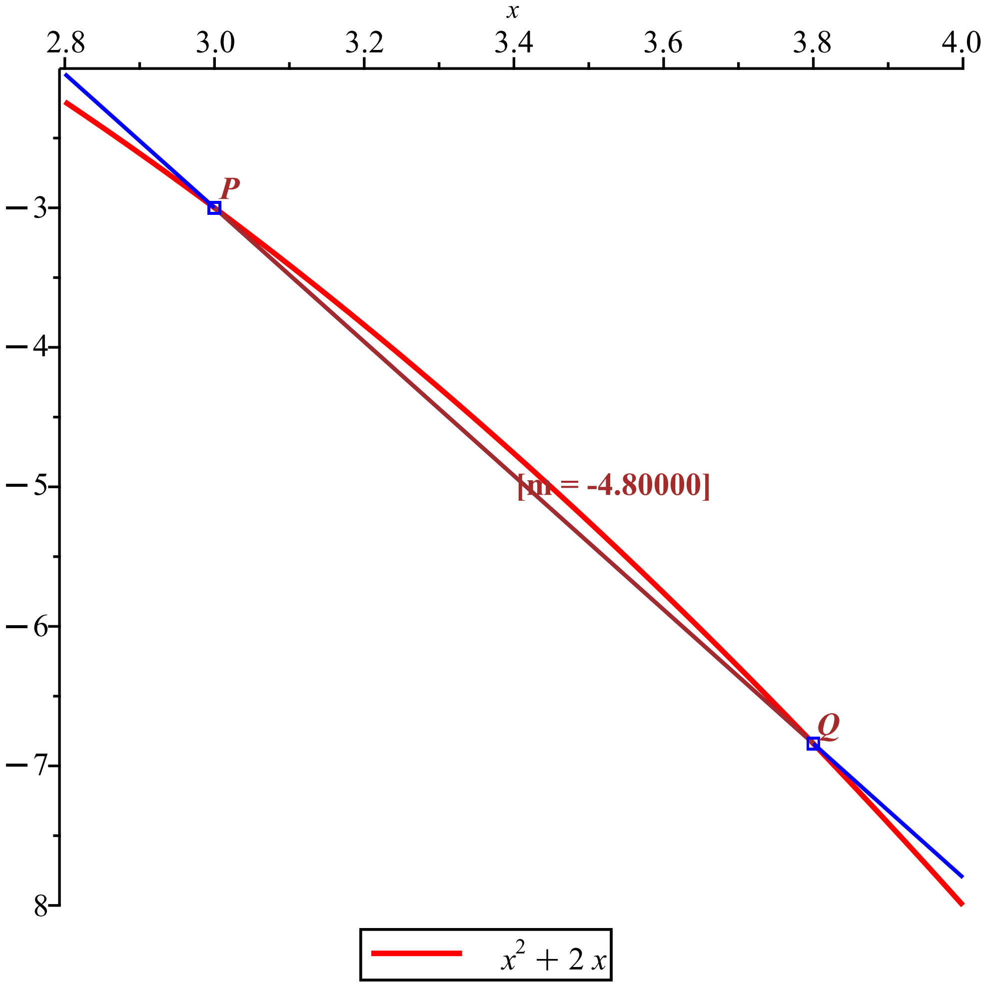
Løsning

Vi løser først **a)** og **b)** ved hjelp av kommandoen *Stigning* gitt tidligere (samme som SlopePredictor)

> $f := x \to 2\,x - x^2$

$$f := x \mapsto 2 \cdot x - x^2$$

> $Stigning(f, 3, x = 2.8..4)$



Klikk på figuren og start animasjonen.
Vi ser at punktet $(3, -3)$ ligger på grafen og at $f'(3) = m = -4$ når Q når frem til P

Beregninger
Den deriverte blir
> $Diff(f(x), x) = diff(f(x), x)$

$$\frac{d}{dx}\left(-x^2 + 2x\right) = -2x + 2$$

Så setter vi inn .
> $map(Eval, \%, x = 3)$

$$\left(\frac{d}{dx}\left(-x^2 + 2x\right)\right)\Big|_{x=3} = \left(-2x + 2\right)\Big|_{x=3}$$

> $lhs(\%) = value(rhs(\%))$

$$\left(\frac{d}{dx}\left(-x^2 + 2x\right)\right)\Big|_{x=3} = -4$$

c) Ligningen for tangenten i et punkt (x_0, y_0) på kurven y=$f(x)$ er gitt ved

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Tangenten i punktet $(-3, 3)$ blir
> $y - (-3) = D(f)(3)(x - 3)$

$$y + 3 = -4\,x + 12$$

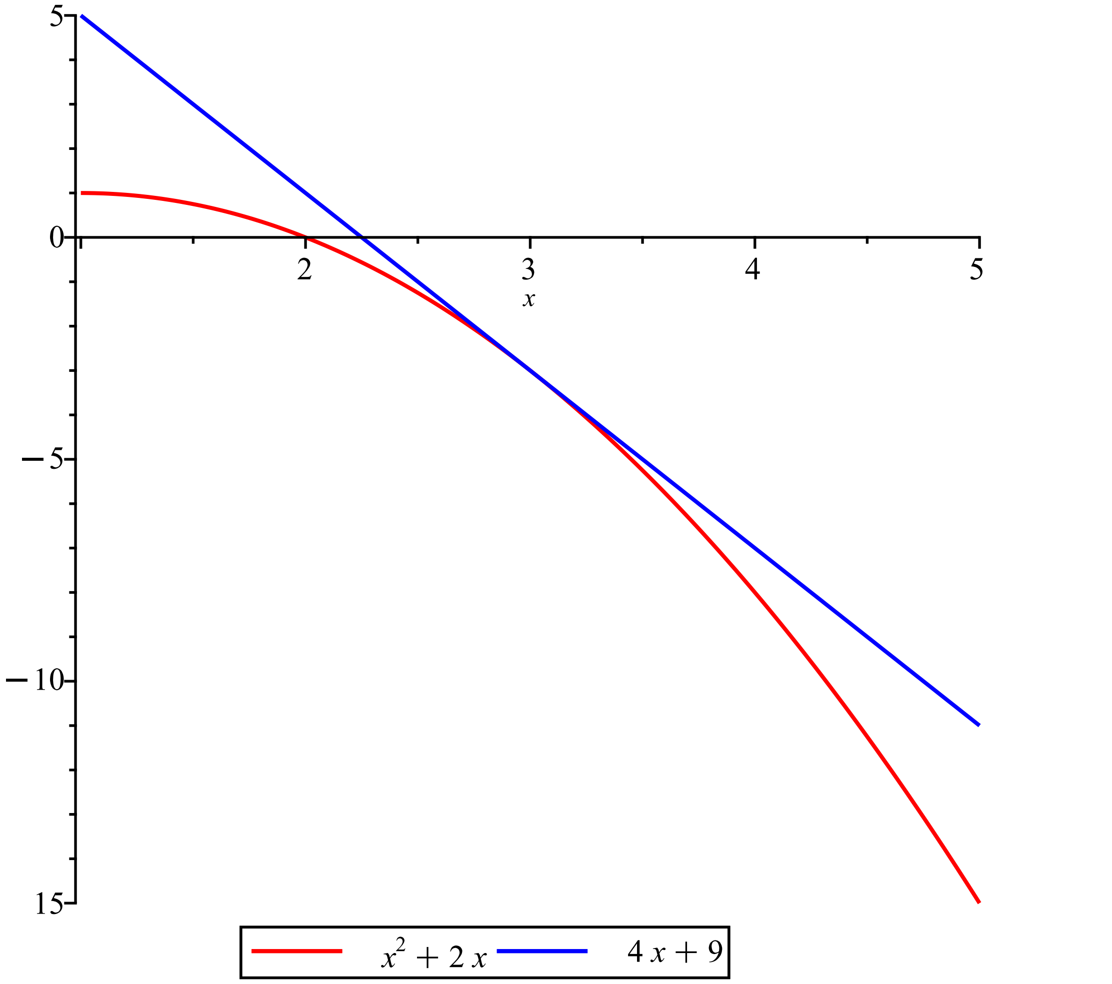
> $y = solve(\%, y)$

$$y = -4\,x + 9$$

> $yt := rhs(\%)$:

Vi plotter grafen til $f(x) = 2\,x - x^2$ og tangenten i samme koordinatsystem.

> $plot([f(x), 9 - 4\,x], x = 1\,..5, color = [red, blue], legend = [typeset(f(x)), typeset(9 - 4\,x)])$



5.4 Noen derivasjonsregler

> $restart$:

$f(x) = k$ $$f(x) = k$$	$diff(\%, x)$ $$\frac{d}{dx} f(x) = 0$$
> $f(x) = a\,x$ $$f(x) = a\,x$$	> $diff(\%, x)$ $$\frac{d}{dx} f(x) = a$$
$f(x) = x^n$ $$f(x) = x^n$$	> $diff(\%, x)$ $$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{x^n\,n}{x}$$ > $simplify(\%)$

$$\frac{d}{dx} f(x) = n\, x^{n-1}$$

>

Eksempel 5.4.1

Finn $f'(x)$ når $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}$, $8x^3 - 4x^2 + \frac{2}{x^2}$, $3x^3 - 4x^2 + 8x - 3$, $6x^{5/2} + 3\sqrt{x}$

Løsning

> $L := \left[x^3 + \frac{1}{x^2}, 8x^3 - 4x^2 + \frac{2}{x^2}, 3x^3 - 4x^2 + 8x - 3, 6x^2\sqrt{x} + 3\sqrt{x}\right]$

$$L := \left[x^3 + \frac{1}{x^2}, 8x^3 - 4x^2 + \frac{2}{x^2}, 3x^3 - 4x^2 + 8x - 3, 6x^{5/2} + 3\sqrt{x}\right]$$

> $map(Diff, L, x)$

$$\left[\frac{d}{dx}\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right), \frac{d}{dx}\left(8x^3 - 4x^2 + \frac{2}{x^2}\right), \frac{d}{dx}\left(3x^3 - 4x^2 + 8x - 3\right), \frac{d}{dx}\left(6x^{5/2} + 3\sqrt{x}\right)\right]$$

> $value(\%)$

$$\left[3x^2 - \frac{2}{x^3}, 24x^2 - 8x - \frac{4}{x^3}, 9x^2 - 8x + 8, 15x^{3/2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}\right]$$

5.5 Generelle derivasjonsregler

> $restart:$

De fire generelle derivasjonsreglene er:

> $Diff(u(x) + v(x), x) = diff(u(x) + v(x), x)$

$$\frac{d}{dx}(u(x) + v(x)) = \frac{d}{dx} u(x) + \frac{d}{dx} v(x)$$

> $Diff(c \cdot v(x), x) = diff(c \cdot v(x), x)$

$$\frac{\partial}{\partial x}(c\, v(x)) = c\left(\frac{d}{dx} v(x)\right)$$

> $Diff(u(x) \cdot v(x), x) = diff(u(x) \cdot v(x), x)$

$$\frac{d}{dx}(u(x)\, v(x)) = \left(\frac{d}{dx} u(x)\right) v(x) + u(x)\left(\frac{d}{dx} v(x)\right)$$

> $Diff\left(\frac{u(x)}{v(x)}, x\right) = diff\left(\frac{u(x)}{v(x)}, x\right)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx} u(x)}{v(x)} - \frac{u(x)\left(\frac{d}{dx} v(x)\right)}{v(x)^2}$$

> $simplify(\%)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{\left(\frac{d}{dx} u(x)\right) v(x) - u(x)\left(\frac{d}{dx} v(x)\right)}{v(x)^2}$$

Eksempel 5.5.1

Finn $f'(x)$ og $f'(1)$ når

a) $f(x) = (2x^4 - 6x)\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)$

b) $f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 2x + 6}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$

Løsning

a)

$> f := x \mapsto (2 \cdot x^4 - 6 \cdot x) \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot x^2\right)$

$$f := x \mapsto (2 \cdot x^4 - 6 \cdot x) \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot x^2\right)$$

$> Diff(f(x), x) = diff(f(x), x)$

$$\frac{d}{dx}\left((2x^4 - 6x)\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\right) = (8x^3 - 6)\left(x - \frac{1}{2}x^2\right) + (2x^4 - 6x)(1 - x)$$

$> simplify(\%)$

$$\frac{d}{dx}\left(-x^2 (x^3 - 3)(-2 + x)\right) = -6x^5 + 10x^4 + 9x^2 - 12x$$

$> map(eval, \%, x = 1)$

$$\left.\left(\frac{d}{dx}\left(-x^2 (x^3 - 3)(-2 + x)\right)\right)\right|_{\{x=1\}} = 1$$

eller

$>$ 'D(f)(1)'=D(f)(1)

$$D(f)(1) = 1$$

b)

$> f := x \mapsto \frac{x-3}{x^2 - 2 \cdot x + 6}$

$$f := x \mapsto \frac{x-3}{x^2 - 2 \cdot x + 6}$$

$> Diff(f(x), x) = diff(f(x), x)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-3}{x^2 - 2x + 6}\right) = \frac{1}{x^2 - 2x + 6} - \frac{(x-3)(2x-2)}{(x^2 - 2x + 6)^2}$$

$> simplify(\%)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-3}{x^2 - 2x + 6}\right) = -\frac{x(x-6)}{(x^2 - 2x + 6)^2}$$

$> map(eval, \%, x = 1)$

$$\left.\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{x-3}{x^2 - 2x + 6}\right)\right)\right|_{\{x=1\}} = \frac{1}{5}$$

c)

> $f := x \mapsto \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

$$f := x \mapsto \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

> $Diff(f(x), x) = diff(f(x), x)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}-2}{2\,(\sqrt{x}+1)^2\sqrt{x}}$$

> $map(Eval, \%, x=1)$

$$\left.\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}\right)\right)\right|_{x=1} = \left.\left(\frac{1}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}-2}{2\,(\sqrt{x}+1)^2\sqrt{x}}\right)\right|_{x=1}$$

> $lhs(\%) = value(rhs(\%))$

$$\left.\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}\right)\right)\right|_{x=1} = \frac{3}{8}$$

5.6 Sammensatte funksjoner og kjerneregelen

> $restart:$

I Maple betegnes den deriverte med

> $\frac{'dy'}{dx} = diff(y(x), x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,y(x)$$

En sammensatt funksjon eller en funksjonsfunksjon, $y(u(x))$, der y er en funksjon av u, som igjen er en funksjon av x , kan deriveres ved hjelp av kjerneregelen.

I Maple ser kjerneregelen slik ut:

> $Diff(y(u(x)), x) = diff(y(u(x)), x)$

$$\frac{d}{dx}\,y(u(x)) = \mathrm{D}(y)(u(x))\left(\frac{d}{dx}\,u(x)\right)$$

Her er $\mathrm{D}(y)(u(x)) = \frac{dy}{d(u(x))}$

Maple bruker automatisk kjerneregelen når det er nødvendig.

Eksempel 5.6.1

Deriver funksjonen $f(x) = \sqrt{x^3+x^2+x+4}$

Løsning

> $restart:$

> $f := u \mapsto \sqrt{u}:$

> $u := x \mapsto x^3+x^2+x+4:$

> $\frac{'df'}{dx} = Diff(f(u), u) \cdot Diff(u(x), x)$

$$\frac{df}{dx} = \left(\frac{d}{du}\left(\sqrt{u}\right)\right)\left(\frac{d}{dx}\left(x^3 + x^2 + x + 4\right)\right)$$

> $value(\%)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{3x^2 + 2x + 1}{2\sqrt{u}}$$

> $subs(u = u(x), \%)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{3x^2 + 2x + 1}{2\sqrt{x^3 + x^2 + x + 4}}$$

Direkte beregning

> $Diff(f(u(x)), x) = diff(f(u(x)), x)$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^3 + x^2 + x + 4}\right) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{2\sqrt{x^3 + x^2 + x + 4}}$$

>

5.7 Derivasjon av trigonometriske funksjoner

Vi har følgende formler for de deriverte av sinus, cosinus og tangens.

> $Diff(\sin(x), x) = diff(\sin(x), x)$

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$$

> $Diff(\cos(x), x) = diff(\cos(x), x)$

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

> $Diff(\tan(x), x) = diff(\tan(x), x)$

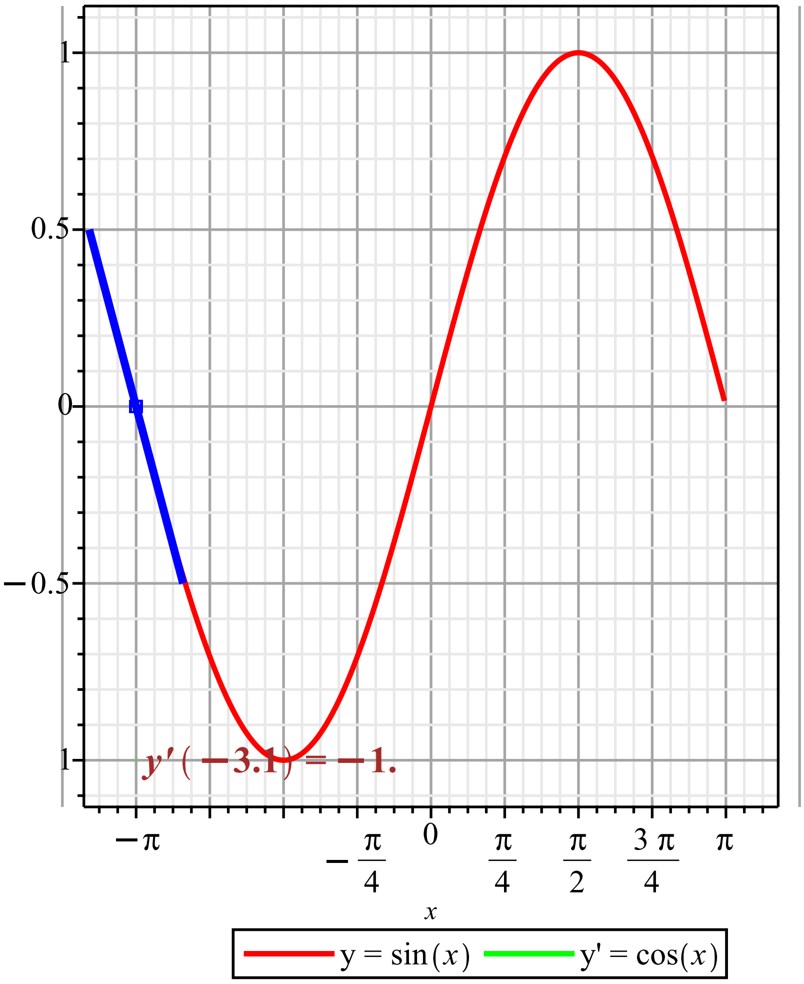
$$\frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + \tan(x)^2$$

Maple-kommandoen

- Derivasjon(f, $x = a..b$, n) viser animasjon av grafene til $f(x)$ og den deriverte $f'(x)$, for x i intervallet fra a til b. n er antall plott som vises i animasjonen.

> $f := x \mapsto \sin(x) :$

> $Derivasjon(f, x = -\pi..\pi, 60)$



> $Student[Calculus1][DerivativeTutor]()$

Eksempel 5.7.1

Deriver $f(x) = \cos(2\,x), x + \sin(2\,x), \dfrac{1}{\sin(x)}, \sin(x)\,\cos(2\,x), \sin(x) = \tan(x)^2$

Løsning

> $L := \left[\cos(2\,x), x + \sin(2\,x), \dfrac{1}{\sin(x)}, \sin(x)\,\cos(2\,x), \tan(x)^2\right]$

$$L := \left[\cos(2\,x), x + \sin(2\,x), \frac{1}{\sin(x)}, \sin(x)\,\cos(2\,x), \tan(x)^2\right]$$

> $map(Diff, L, x)$

$$\left[\frac{d}{dx}\cos(2\,x), \frac{d}{dx}(x + \sin(2\,x)), \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin(x)}\right), \frac{d}{dx}(\sin(x)\,\cos(2\,x)), \frac{d}{dx}\left(\tan(x)^2\right)\right]$$

> $value(\%)$

$$\left[-2\sin(2\,x), 1 + 2\cos(2\,x), -\frac{\cos(x)}{\sin(x)^2}, \cos(x)\,\cos(2\,x) - 2\sin(x)\,\sin(2\,x), 2\tan(x)\,\left(1 + \tan(x)^2\right)\right]$$